**04\_Теоретическая справка**

**Методы численного дифференцирования и интегрирования**

Разностные отношения для вычисления производных

Пусть задана сетка на отрезке :

 , где



Обозначим:



Справедливы равенства (разностные отношения)









Применение алгебраической интерполяции для вычисления производных

Метод состоит в получении интерполяционного многочлена по заданным значениям функции. Значение производной функции принимается равным значению производной от этого многочлена. Недостаток метода состоит в том, что хороший результат интерполяции не гарантирует хорошего приближения производной

Если *P*(*x*) — интерполяционный многочлен по заданным узлам

и *r*(*x, f*) — погрешность интерполяции, то:



Погрешность этой формулы – производная от погрешности интерполяции, поэтому хороший результат интерполяции не гарантирует хорошего приближения производной

Квадратурные формулы

для приближенного вычисления определенного интеграла



*Квадратурная формула*:

,

здесь-узлы и  - веса (коэффициенты) квадратурной формулы

Пусть  - количество частичных отрезков на интервале  , .

*Алгебраической степенью точности* квадратурной формулы называется наивысшая степень многочлена, который формула интегрирует точно.

Квадратурные формулы интерполяционного типа

Получение интерполяционных квадратурных формул основано на замене подынтегральной функции интерполяционным полиномом по заранее выбранным узлам. За приближенное значение интеграла принимается интеграл от этого полинома.

*Формула трапеций*:

Пусть  - количество частичных отрезков на интервале , .



*Формула Симпсона*:

Пусть , где m — произвольное целое

****

Квадратурная формула Гаусса:

Алгебраическая степень точности формулы Гаусса 2*n*-1, где *n* — количество используемых узлов.

Для приближенного вычисления интеграла на отрезке  используются формула



в которой коэффициенты и узлы известны из специальных таблиц.

При 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  | 0.1713244924 | -0.9324695142 |
|  | 0.3607615730 | -0.6612093864 |
|  | 0.4679139346 | -0.2386191861 |
|  | 0.4679139346 | 0.2386191861 |
|  | 0.3607615730 | 0.6612093864 |
|  | 0.1713244924 | 0.9324695142 |

Для вычисления интеграла на произвольном отрезке  следует выполнить замену переменных:



Тогда 

Правило Рунге оценки погрешности

Пусть

 - значение интеграла, вычисленное с шагом *,* (для формулы Симпсона);

 - значение интеграла, вычисленное с шагом  (т. е. с числом узлов ).

Тогда для оценки точности последнего вычисления используется величина



*k=2* для формулы трапеций, *k=4* для формулы Симпсона.

Алгоритм автоматического выбора шага интегрирования

1) На первом шаге выбирается произвольное значения — количество узлов интегрирования.

2) Далее вычисляются:

 — значение интеграла, вычисленное с шагом *,*

 - значение интеграла, вычисленное с шагом  (т. е. с числом узлов )

3) Определяется погрешность по правилу Рунге. Если ее величина меньше заданного уровня погрешности *eps,* вычисления заканчиваются. За приближенное значение интеграла принимается , либо проводится еще одно уточнение с помощью экстраполяции по Ричардсону.

В противном случае вычисления повторяются с шага 2).

*Замечание*. Алгоритм должен предусматривает прекращение вычислений и выдачу последнего результата и соответствующего сообщения, если за некоторое, заранее выбранное, максимальное количество итераций не будет достигнут требуемый уровень погрешности.

Экстраполяция по Ричардсону

Для повышения точности вычислений применяют формулу:



Вычисление кратных интегралов с использованием квадратурных формул

Если вычисление кратного интегралов, может быть сведено к вычислению повторных интегралов, то для вычисления каждого из повторных интегралов можно применить квадратурную формулу.

Пусть область интегрирования - прямоугольник  и известны квадратурные формулы для вычисления интегралов



и



Тогда



Таким образом на основе двух квадратурных формул (в общем случае различных для интегрирования по  и по ) получена кубатурная формула для вычисления кратного интеграла по прямоугольной области:

